THÉORÈME DE DOLD-THOM

FRANCIS BEAUCHEMIN-CÔTÉ

1. Produit symétrique $SP(X)$.

Définition 1.1. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé (et Hausdorff). On définit le n-ième produit symétrique de X, noté $SP_n(X)$, comme étant le quotient du produit X^n par l'action du n-ième groupe symétrique S_n qui agit en permutant les facteurs. Autrement dit, $SP_n(X) := X^n/S_n$.

L'inclusion $(p_1, \dots, p_n) \mapsto (p_1, \dots, p_n, e)$ qui envoie X^n dans X^{n+1}, induit clairement une inclusion de $SP_n(X)$ dans $SP_{n+1}(X)$.

Le produit symétrique de X est $SP(X) := colim_n SP_n(X)$ et a comme point de base le point dont tous les facteurs sont x_0.

Une fonction continue pointée $f : X \to Y$ induit naturellement des applications $SP_n(f) : SP_n(X) \to SP_n(Y)$ et $SP(f) : SP(X) \to SP(Y)$.

Propriété 1.2. $SP : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ est un foncteur d'homotopie, c.-à-d. que
— si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, alors $SP(g \circ f) = SP(g) \circ SP(f)$;
— $SP(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{SP(X)}$;
— si $f \simeq g$, alors $SP_n(f) \simeq SP_n(g)$ et $SP(f) \simeq SP(g)$.

Proposition 1.3. *Si X est connexe par arcs, alors $SP(X)$ l'est également.*

On peut facilement voir que le produit symétrique d'un point est également un point, c.-à-d. que $SP(\{pt\}) = \{pt\}$. De plus, avec un peu de travail, il est possible de calculer le type d'homotopie du cercle :

Proposition 1.4. $SP(S^1) \simeq S^1$.

Démonstration. Voir [Ba] pour les détails. □

Remarque. *Pour un élément $b = [b_1, \dots, b_k] \in SP(X)$, on notera $b = b_1 + \dots + b_k$ où les $b_i \neq x_0$, car cette notation illustre bien que l'on peut alterner les facteurs.*

Définition 1.5. On définit une somme $+ : SP(X) \times SP(X) \to SP(X)$ sur le produit symétrique de X par

$$(x_1 + \dots + x_k) + (y_1 + \dots + y_l) \mapsto x_1 + \dots + x_k + y_1 + \dots + y_l.$$

Théorème 1.6. *L'addition $+ : SP(X) \times SP(X) \to SP(X)$ est continue sur chaque $SP_k(X) \times SP_l(X)$ ainsi que sur chaque ensemble compact de $SP(X) \times SP(X)$.*

L'opération de somme sur le produit symétrique présume naturellement l'existence d'une opération de « différence ». Étant donnés a et b dans $SP(X)$, est-ce qu'il existe $x \in SP(X)$ tel que l'équation $a + x = b$ a un sens ? Si oui, ce x est unique et on a le résultat suivant :

Théorème 1.7. *L'application de différence* $- : SP(X) \times SP(X) \to SP(X) : (a,b) \mapsto a - b$ *est continue sur l'intersection de son domaine de définition avec* $SP_k(X) \times SP_l(X)$ *pour chaque* k *et* l. *Elle est également continue sur chaque ensemble compact de son domaine de définition.*

Voir [AGP] pour les détails des preuves des deux résultats précédents.

2. Quasifibration et théorème de Dold-Thom.

Dans ce qui suit, je suivrai principalement la preuve de [Ba].

Définition 2.1. Une fonction continue $p : E \to B$ est une *quasifibration* si l'application induite $p_* : \pi_i(E, p^{-1}(b)) \to \pi_i(B)$ est un isomorphisme pour tout $b \in B$ et $i \geq 0$.

Les fibrés et les fibrations sont des exemples de quasifibrations. Les trois lemmes suivants seront pratiques pour démontrer le théorème de Dold-Thom dans sa première version.

Lemme 2.2. *Soit* $p : E \to B$ *une fonction continue. S'il existe des sous-ensembles* U *et* V *de* B *tels que* $B = U \cup V$ *et tels que* $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U$, $p|_{p^{-1}(V)} : p^{-1}(V) \to V$ *et* $p|_{p^{-1}(U \cap V)} : p^{-1}(U \cap V) \to U \cap V$ *sont des quasifibrations, alors* p *est une quasifibration.*

Lemme 2.3. *Soit* $p : E \to B$ *une fonction continue où* $B = colim_i B_i$. *Si* $p|_{p^{-1}(B_i)} : p^{-1}(B_i) \to B_i$ *est quasifibration pour tout* i, *alors* p *est une quasifibration.*

Lemme 2.4. *Soit* $p : E \to B$ *une fonction continue. S'il existe une homotopie* F_t *de* E *vers un sous-espace* E' *relevant une homotopie* G_t *de* B *vers un sous-espace* B' *de sorte que* $p|_{E'} : E' \to B'$ *est une quasifibration et telle que* $F_1 : p^{-1}(b) \to p^{-1}(G_1(b))$ *est une équivalence d'homotopie faible pour tout* $b \in B$, *alors* p *est une quasifibration.*

Remarque. On dit que F_t relève G_t si $p \circ F_t = G_t \circ p$, pour tout t.

Pour une preuve des lemmes précédents, voir [Ba] ou [Hat].

Théorème 2.5 (Dold-Thom Version I)**.** *Soit* (X, A, x_0) *une paire de CW-complexes pointés connexes par arcs. Si* $\tilde{p} : X \to X/A$ *est la projection canonique, alors* $p := SP(p) : SP(X) \to SP(X/A)$ *est une quasifibration dont les fibres sont homéomorphes à* $SP(A)$.

Démonstration. Comme $SP(X/A) = colim_n SP_n(X/A)$, par le lemme 2.3, il suffit pour conclure de montrer que $p_n = p|_{E_n} : E_n \to B_n$ est une quasifibration pour tout n, où $B_n := SP_n(X/A)$ et $E_n := p_n^{-1}(B_n)$. Pour ce faire, procédons par récurrence sur n.

Pour le cas $n = 0$, nous avons $B_0 = \{pt\}$. Ainsi, $p_0 : E_0 \to B_0$ induit $(p_0)_* : \pi_i(E_0, p_0^{-1}(B_0)) \to \pi_i(B_0)$ avec $\pi_i(E_0, p_0^{-1}(B_0)) = \pi_i(E_0, E_0) = 0$ et $\pi_i(B_0) = 0$. Le résultat est trivial.

Considérons maintenant le cas $n > 0$. L'idée est d'utiliser le lemme 2.2. Nous cherchons donc un voisinage U de B_{n-1} pour lesquels $p_n|_{p_n^{-1}(U)} : p_n^{-1}(U) \to U$ et

$p_n|_{p_n^{-1}(U\cap V)} : p_n^{-1}(U\cap V) \to U\cap V$ sont des quasifibrations, où $V := B_n - B_{n-1}$. Il faudra également vérifier que $p_n|_{p_n^{-1}(V)} : p_n^{-1}(V) \to V$ est une quasifibration.

Avant de procéder, nous pouvons supposer SPDG que $X = M_j$ est le cylindre de l'inclusion $j : A \to X$, puisque SP est un foncteur d'homotopie (donc $SP(X) \simeq SP(M_j)$).

Commençons maintenant à montrer que $p_n|_{p_n^{-1}(U)} : p_n^{-1}(U) \to U$ est quasifibration. Prenons $N = A\times[0,1/2)$ un voisinage ouvert de A dans le cylindre X et $f_t : X \to X$ une homotopie qui déforme N vers A en glissant les points du cylindre le long des segments $\{a\}\times I$. En particulier, chaque point de $A\times\{0\}$ sont fixés par f_t. Celle-ci induit clairement une homotopie $\bar{f}_t : X/A \to X/A$ qui déforme N/A vers $e_0 := A/A$ et qui satisfait $\tilde{p}\circ f_t = \bar{f}_t\circ\tilde{p}$. Soit donc $U \subseteq B_n$ l'ensemble des points dont au moins un facteur est élément de N/A. Puisque $e_0 \in N/A$, alors tout point $[x_1]+\ldots+[x_{n-1}]+e_0$ de B_{n-1} vu dans B_n possède au moins un facteur dans N/A, d'où U est bien un voisinage de B_{n-1}. Posons $F_t := SP(f_t)$ et $\bar{F}_t := SP(\bar{f}_t)$. Ces fonctions sont des homotopies de $SP(X)$ et $SP(X/A)$ respectivement et en fait, comme SP est foncteur, alors F_t relève $\bar{F}_t$ et cette dernière déforme U vers B_{n-1} (le facteur dans N/A est déformé par $\bar{F}_t$ vers e_0, donc au final on a au plus $n-1$ facteurs différents de e_0). De manière analogue, F_t déforme $p_n^{-1}(U)$ vers E_n. Par le lemme 2.4, comme $p_{n-1} : E_{n-1} \to B_{n-1}$ est une quasifibration par hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que $F_1 : p_n^{-1}(b) \to p_n^{-1}(\bar{F}_1(b))$ pour tout $b \in U$. Fixons alors $b = [x_1]+\ldots+[x_n] \in U \subseteq B_n$ et supposons que les $[x_i]$ sont différents de e_0 (autrement, le résultat est direct). Alors chaque $[x_i]$ possède un unique antécédant $x_i \in X - A$. On a de ce fait un homéomorphisme $\psi : SP(A) \to p_n^{-1}(b)$ définie par

$$P \mapsto P + x_1 + \ldots + x_n.$$

En appliquant f_1 aux x_i, certains seront envoyés dans A et d'autres dans $X - A$. Quitte à réarranger les termes, on peut supposer SPDG que $f_1(x_1),\ldots,f_1(x_k) \in X - A$ et $f_1(x_{k+1}),\ldots,f_1(x_n) \in A$. Ainsi on obtient un homéomorphisme entre $SP(A)$ et $p_n^{-1}(\bar{F}_1(b))$ via l'application $\varphi : SP(A) \to p_n^{-1}(\bar{F}_1(b))$ définie par

$$P \mapsto P + f_1(x_1) + \ldots + f_1(x_k).$$

Pour $P \in SP(A)$, on a

$$\begin{aligned} F_1(\psi(P)) &= F_1(P + x_1 + \ldots + x_n)\\ &= F_1(P) + f_1(x_1) + \ldots + f_1(x_n)\\ &= \varphi(F_1(P)) + f_1(x_{k+1}) + \ldots + f_1(x_n)\\ &= \varphi(F_1(P)) + Q \end{aligned}$$

où $Q := f_1(x_{k+1}) + \ldots + f_1(x_n) \in SP(A)$. Par hypothèse, A est connexe par arcs. Donc $SP(A)$ l'est également et on peut trouver un chemin γ_t dans $SP(A)$ tel que $\gamma_0 = Q$ et γ_1 est le point de base de SP(A). De là, nous avons que $\mu_t : F_1\circ\psi \simeq \varphi$ où μ_t est l'homotopie définie par $P \mapsto \varphi(F_{1-t}(P)) + \gamma_t$. Comme ψ^{-1} est défnie sur $p_n^{-1}(b)$, on déduit que

$$F_1|_{p_n^{-1}(b)} = F_1\circ\psi\circ\psi^{-1} \simeq \varphi\circ\psi^{-1}.$$

Autrement dit, $F_1|_{p_n^{-1}(b)}$ est homotope à un homéomorphisme, ce qui implique que c'est en particulier une équivalence d'homologie faible. Bref, on conclut bien que $p_n : p_n^{-1}(U) \to U$ est une quasifibration.

Considérons maintenant $V = B_n - B_{n-1}$. Un élément P dans $p_n^{-1}(V) \subseteq SP(X)$ possède exactement n facteurs $x_1, \ldots, x_n$ dans $X - A$. Si l'on note $y_1, \ldots, y_r$ tous les autres facteurs éléments de $A - \{x_0\}$, alors $P = x_1 + \ldots + x_n + y_1 + \ldots + y_r$. Soit $\sigma : p_n^{-1}(V) \to V \times SP(A)$ définie par

$$P \mapsto (\sigma_1(P), \sigma_2(P)) = (p_n(x_1 + \ldots + x_n), y_1 + \ldots + y_r).$$

Si σ est bijective et σ et σ^{-1} sont continues sur les sous-ensembles compacts de leur domaine de définition, on voit facilement que $\sigma_* : \pi_i(p_n^{-1}(V)) \to \pi_i(V \times SP(A))$ est un isomorphisme pour tout i et que $\sigma(p_n^{-1}(b)) = \{b\} \times SP(A)$. Ainsi, si $q_1 : V \times SP(A) \to V$ dénote la projection sur le premier facteur, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\pi_i(p_n^{-1}(V), p_n^{-1}(b)) \arrow[r, "(p_n)_*"] \arrow[d, "\sigma_*"', "\cong"] & \pi_i(V, b) \\
\pi_i(V \times SP(A), \{b\} \times SP(A)). \arrow[ur, "(q_1)_*"'] &
\end{tikzcd}$$

Comme q_1 est fibré trivial, c'est en particulier une quasifibration et $(q_1)_*$ est un isomorphisme pour tout i. D'où, au final, on aurait que $(p_n)_*$ est un isomorphisme, c.-à-d. que $p_n|_{p_n^{-1}(V)} : p_n^{-1}(V) \to V$ est une quasifibration.

Appliquons nous donc à montrer que σ est bijective et que σ et σ^{-1} sont continues sur les compacts de $p_n^{-1}(V)$. Pour voir que σ est continue sur les compacts, il suffit de le voir pour σ_1 et σ_2. Remarquons que $V = SP_n(X/A - \{e_0\})$ et que l'homéomorphisme $X/A - \{e_0\} \to X - A$ induit un homéomorphisme $\theta : V = SP_n(X/A - \{e_0\}) \to SP_n(X - A)$. Puisque $SP_n(X - A)$ s'inclut dans $SP(X)$, on peut voir θ comme une application continue $V \to SP(X)$. Mais alors $\sigma_1(P) = p_n(P)$ et $\sigma_2(P) = P - \theta \circ p_n(P)$, ce qui implique que σ_1 est continue et σ_2 est continue sur les compacts par le lemme 1.7.

Quant à $\sigma^{-1} : V \times SP(A)$, elle est donnée par $(v, Q) \mapsto \theta(v) + Q$, car $p_n \circ \theta = \mathrm{id}_V$. C'est donc la restriction de l'addition sur $SP_n(X - A) \times SP(A)$. Par le théorème 1.6, σ^{-1} est bien continue sur les sous-ensembles compacts.

Finalement, un argument tout à fait similaire donne un homéomorphisme sur les sous-ensembles compacts $p_n^{-1}(U \cap V) \to (U \cap V) \times SP(A)$, ce qui implique que $p_n|_{p_n^{-1}(U \cap V)}$ est aussi une quasifibration. □

Ce théorème a pour conséquence immédiate le corollaire suivant :

Corollaire 2.6. *Pour (X, A) une paire de CW-complexes pointés connexes par arcs, il existe des applications $\partial_i : \pi_i(SP(X/A)) \to \pi_{i-1}(SP(A))$ qui s'inscrivent dans une longue suite exacte*

$$\ldots \to \pi_i \circ SP(A) \to \pi_i \circ SP(X) \to \pi_i \circ SP(X/A) \xrightarrow{\partial_i} \pi_{i-1} \circ SP(A) \to \ldots$$

et qui satisfont les propriétés de naturalité.

Démonstration. Par le théorème précédent, on a que $p_* : \pi_i(SP(X), SP(A)) \to \pi_i(SP(X/A))$ est un isomorphisme. Ainsi, en considérant la longue suite exacte associée à la paire $(SP(X), SP(A))$, on obtient bien une longue suite exacte :

$$\ldots \to \pi_i \circ SP(A) \to \pi_i \circ SP(X) \to \pi_i \circ SP(X/A) \to \pi_{i-1} \circ SP(A) \to \ldots$$

telle que voulue. □

Nous sommes maintenant prêts à énoncer et démontrer le théorème de Dold-Thom dans sa version la plus « élégante ».

Théorème 2.7 (Dold-Thom Version II)**.** *Pour X un CW-complexe connexe par arcs, $\tilde{H}_k(X) := \pi_k(SP(X))$ définit une théorie d'homologie réduite. Si X est un CW-complexe qui n'est pas connexe par arcs, on définit plutôt $\tilde{H}_k(X) := \pi_{k+1}(SP(\Sigma X))$.*

Démonstration. $\tilde{H}_k = \pi_k \circ SP$ est un foncteur de la catégorie d'homotopie des CW-complexes pointés non-dégénérés vers celle des groupes abéliens. Il est clair que $\tilde{H}_k(X)$ est abélien pour $k \geq 2$ et par l'axiome de suspension que nous montrerons plus loin, $\tilde{H}_0(X)$ et $\tilde{H}_1(X)$ sont isomorphes à des groupes abéliens. Il suffit donc de montrer que les axiomes d'exactitude, de suspension, d'additivité, d'équivalence d'homotopie faible et de dimension sont satisfaits.

Pour l'axiome d'exactitude, soit $\iota : A \to X$ une cofibration entre CW-complexes pointés connexes par arcs. Par le corollaire 2.6, on a en particulier $\forall k$ une suite exacte

$$\pi_k(SP(A)) \to \pi_k(SP(X)) \to \pi_k(SP(X/A)).$$

Pour le second axiome, considérons Y un CW-complexe connexe par arcs. Alors la paire (CY, Y) satisfait les hypothèses du corollaire 2.6 et comme $\Sigma Y = CY/Y$, on obtient une longue suite exacte

$$\ldots \to \pi_{k+1}(SP(CY)) \to \pi_{k+1}(SP(\Sigma Y)) \to \pi_k(SP(Y)) \to \pi_k(SP(CY)) \to \ldots$$

Mais $CY \simeq \{pt\}$, ce qui implique que $SP(CY) \simeq SP(\{pt\}) = \{pt\}$. De tout ceci, on en déduit un isomorphisme naturel

$$\pi_k SP(Y) \cong \pi_{k+1}(SP(\Sigma Y)).$$

Pour l'axiome d'additivité, on montre d'abord que $SP(\bigvee_\alpha X_\alpha) = \Pi^\circ_\alpha SP(X_\alpha)$, où Π° est le produit faible, et ensuite que $\pi_k(\Pi^\circ_\alpha SP(X_\alpha)) = \bigoplus_\alpha \pi_k(SP(X_\alpha))$. De ces faits, on obtient bien que $\pi_k(SP(\bigvee_\alpha X_\alpha)) = \bigoplus_\alpha \pi_k(SP(X_\alpha))$. Voir [Ba] pour les détails.

Soit maintenant $f : X \to Y$ une équivalence d'homotopie faible entre deux CW-complexes. Par Whitehead, f est en fait une équivalence d'homotopie. Alors $SP(f) : SP(X) \to SP(Y)$ est aussi une équivalence d'homotopie. On conclut que $\tilde{H}_k(f) = (SP(f))_* : \pi_k(SP(X)) \to \pi_k(SP(Y))$ est un isomorphisme, ce qui montre que l'axiome équivalence d'homotopie faible est satisfaite.

Par la définition de $\tilde{H}_k$ sur les CW-complexes non connexes par arcs, on peut aussi montrer l'axiome de dimension. En effet, on a

$$\tilde{H}_k(S^0) = \pi_{k+1}(SP(\Sigma S^0)) = \pi_{k+1}(SP(S^1)) = \pi_{k+1}(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, \end{cases}$$

où la troisième égalité est obtenue par le fait que $SP(S^1) \simeq S^1$ mentionné à la proposition 1.4 .

$\square$

Corollaire 2.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $SP(S^n)$ est un $K(\mathbb{Z}, n)$ espace.*

Démonstration. Par Dold-Thom,

$$\pi_k(SP(S^n)) = \tilde{H}_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

$\square$

Définition 2.9. Pour G un groupe abélien et un entier $n \geq 1$, un $M(G,n)$-espace, ou espace de Moore, est un espace tel que $H_n(M(G,n)) \cong G$ et $\tilde{H}_i(M(G,n)) = 0$ pour $i \neq n$.

Corollaire 2.10. *Pour un espace de Moore $M(G,n)$, $SP(M(G,n))$ est un $K(G,n)$-espace.*

Démonstration. Par Dold-Thom,

$$\pi_k(SP(M(G,n))) = \tilde{H}_k(M(G,n)) = \begin{cases} G & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases} \tag{2.11}$$

$\square$

Références

[AGP] M. Aguilar, S. Gitler et C. Pietro, *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, New-York : Springer-Verlag, 2002.

[Ba] T. Barnet-Lamb, *The Dold-Thom Theorem.*, Brandeis University.

[Hat] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[Vi] A. Villadsen, *The Infinite Symmetric Product and Homology Theory.*